

# TEMA 4.

## TEORÍA DE CIRCUITOS

### 1. Introducción: rango de validez de la teoría de circuitos

En el tema de corrientes eléctricas estacionarias se introdujo la idea de un circuito eléctrico, y se hizo un análisis de las corrientes en dichos circuitos cuando se excitaban por voltajes constantes. En este tema estas ideas se ampliarán ahora para incluir los voltajes que varían lentamente y las corrientes resultantes que varían lentamente. Para entender de forma adecuada la expresión “que varían lentamente” deben usarse las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, las ideas generales pueden entenderse sin recurrir a los detalles de estas ecuaciones.

Para variaciones sinusoidales de voltaje en circuitos que contienen elementos lineales, base para la teoría elemental de circuitos, el comportamiento de un circuito se caracteriza por una frecuencia  $\omega$  ( $2\pi f$ ). Una onda electromagnética oscilando a esta frecuencia en el espacio libre tiene una longitud de onda  $\lambda = 2\pi c / \omega$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. La restricción principal que debe imponerse para que la corriente en el circuito pueda llamarse de variación lenta es que el circuito no deberá radiar una cantidad apreciable de potencia. Esta restricción puede satisfacerse exigiendo que la mayor dimensión lineal del sistema,  $l_{\max}$ , sea mucho menor que la longitud de onda en el espacio libre asociada con la frecuencia excitadora (campos cuasi-estacionarios); esto es:

$$l_{\max} \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{ó} \quad \omega \ll \frac{2\pi c}{l_{\max}} \quad (1.1)$$

$f$ (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$\lambda$ (m)	$l_{\max}$ (m)
60	376	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^5$
$10^6$	$6.28 \times 10^6$	300	30
$10^8$	$6.28 \times 10^8$	3	0.3
$10^{10}$	$6.28 \times 10^{10}$	0.03	0.003

Tabla 1

Si se satisface esta condición, entonces para cada elemento  $dl$  del circuito por el que circula una corriente  $I$ , hay, a una distancia mucho menor que una longitud de onda, un elemento correspondiente  $-dl$  por el que circula la misma corriente. Esta duplicidad asegura claramente la cancelación de los campos producidos por estos

elementos a distancias del orden de unas cuantas longitudes de onda en todas direcciones y, por tanto, muestra que los campos asociados al circuito están restringidos a la vecindad del mismo. Para ver qué restricciones prácticas impone la ecuación (1.1), se ha construido la tabla 1 usando  $l \approx \frac{\lambda}{10_{max}}$  como máxima dimensión del circuito. Las frecuencias elegidas son la frecuencia de operación de una línea de transmisión de energía eléctrica, una radiofrecuencia baja (banda de radiodifusión AM), una radiofrecuencia alta (FM y TV) y una frecuencia de microondas. Es evidente que para las tres primeras frecuencias los circuitos comunes satisfacen el criterio. Sin embargo para la última, el circuito debe construirse en un cubo de aproximadamente 2.54 milímetros de lado, lo que restringe su aplicabilidad a circuitos integrados. Deberá también observarse que a 100 MHz, la longitud de onda y las dimensiones del circuito son de tamaño adecuado para un laboratorio y, en consecuencia, debe tenerse cuidado al aplicar la teoría de circuitos comunes a estas frecuencias y a otras mayores. En el resto del tema se supondrá que se satisface el criterio de variación lenta, sin más comentarios explícitos.

## 2. Respuesta a la corriente alterna de los elementos pasivos

### 2.1. Tipos de elementos y caracterización

#### a) Resistencia:

En el dominio del tiempo, se cumple que

$$v(t) = Ri(t)$$

donde

$$V_0 = RI_0$$

Supongamos que circula una intensidad en la R de valor:

$$i = \text{Re}[I_0 e^{j\omega t}] \tag{2.1}$$

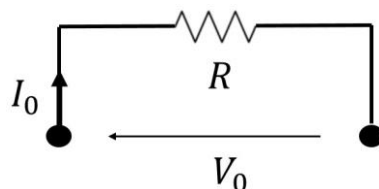


Fig. 1. Respuesta a la corriente alterna de una resistencia.

La tensión en el dominio del tiempo, será pues:

$$v = Ri = \text{Re}[RI_0 e^{j\omega t}] = \text{Re}[V_0 e^{j\omega t}], \tag{2.2}$$

cuya representación en el dominio de la frecuencia compleja se muestra en la figura 2.

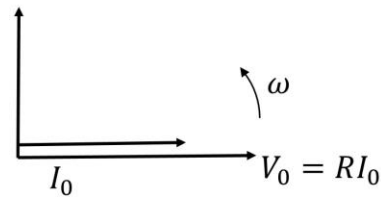


Fig. 2. Representación en frecuencia compleja de la respuesta de una resistencia frente a corriente alterna.

En este caso, se dice que  $v$  e  $i$  están en fase (ya que coinciden su dirección y sentido, al compartir el mismo ángulo  $\omega$ ).

**b) Autoinducción L (sin resistencia):**

Si la intensidad es:

$$i = \text{Re}[I_0 e^{j\omega t}], \tag{2.3}$$

la tensión en la bobina será:

$$v = -e = L \frac{di}{dt} \rightarrow V_0 = \omega LI_0 \tag{2.4}$$

será:

$$v = -e = L \frac{d}{dt} [\text{Re}(I_0 e^{j\omega t})] = \text{Re}[j\omega LI_0 e^{j\omega t}] = \text{Re}[V_0 j e^{j\omega t}], \tag{2.5}$$

que da:

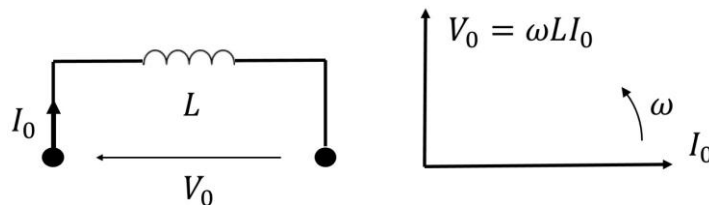


Fig. 3. Respuesta a la corriente alterna de una autoinducción y su representación en frecuencia compleja.

En este caso, la tensión adelanta  $90^\circ$  a la intensidad.

**c) Condensador**

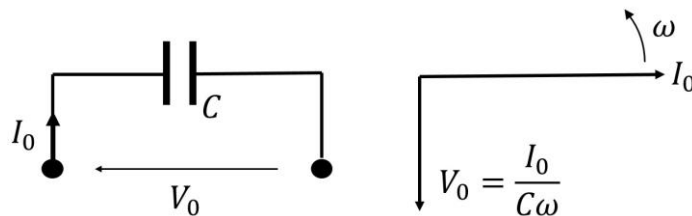


Fig. 4. Respuesta a la corriente alterna de un condensador y su representación en frecuencia compleja.

En este último caso, se puede apreciar como la tensión retrasa  $90^\circ$  a la intensidad.

$$V_0 = \frac{I_0}{\omega C}$$

$$v = \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int \text{Re} [I_0 e^{j\omega t}] dt = \text{Re} \left[ \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\omega t} \right] \quad (2.6)$$

que es:

$$v = \text{Re} \left[ \frac{V_0}{j} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} [-jV_0 e^{j\omega t}] \quad (2.7)$$

## 2.2. Impedancia de un circuito

Se denomina impedancia al cociente entre los fasores de V e I:

$$Z = \frac{V}{I} \quad (\text{ley de Ohm en alterna}) \quad (2.8)$$

Si se tiene un circuito:

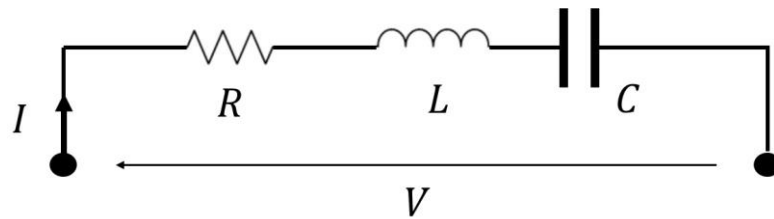


Fig. 5. Circuito de corriente alterna integrado por resistencia, autoinducción y condensador.

Podemos expresar los diferentes fasores de voltaje, relacionados con los elementos pasivos presentes en el circuito en función del fador corriente de la siguiente manera:

$$V_R = RI; \quad V_L = j\omega LI; \quad V_C = \frac{-j}{\omega C} I; \quad (2.9)$$

siendo el montante final de voltaje en el circuito (expresado en forma fasorial)

$$V = V_R + V_L + V_C = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I; \quad (2.10)$$

De este modo, obtenemos fácilmente, la siguiente expresión para la impedancia del circuito

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX, \quad (\Omega) \quad (2.11)$$

de la que nos valemos para llevar a cabo una definición de los diferentes tipos de reactancia ( $X$ ) que pueden presentarse en un problema de estas características.

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

donde:  $X_L = j\omega L$ : Se denomina reactancia inductiva ( $\Omega$ ) (2.12)

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

: Se denomina reactancia capacitiva ( $\Omega$ )

La ecuación (2.11) es, como puede observarse, similar a la utilizada en el caso de corriente continua: la resistencia total de elementos en serie es la suma de las resistencias parciales. Análogamente, en alterna, la impedancia total es la suma de impedancias.

### 3. Análisis de circuitos en Corriente Alterna

El análisis se realiza de igual forma que en corriente continua pero teniendo en cuenta que se debe operar con números complejos.

Así las leyes de Kirchhoff, por ejemplo la primera ley:

$$\sum_i I_i = 0 \quad (3.1)$$

será suma de intensidades complejas (fasores de corriente) en un nudo igual a cero.

Lo mismo se puede decir, con toda la teoría de circuitos, mallas, nudos etc..., donde en vez de operar con resistencias se opera con impedancias complejas.

El valor eficaz de una corriente (o voltaje) periódico, de período  $T$ , es el valor de corriente (o voltaje) estacionario que en un período  $T$ , y sobre una resistencia  $R$ , producirá la misma cantidad de calor, esto es:

$$I^2 RT = calor = \int_0^T Ri^2 dt \quad (3.2)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \quad (3.3)$$

Por lo tanto, los valores eficaces tanto de corriente como de voltaje sinusoidales (o cosinusoidales), tomarían la forma:

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (V \rightarrow \text{Valor eficaz del voltaje}),$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (I \rightarrow \text{Valor eficaz de la intensidad}) \quad (3.4)$$

siendo  $V_m$  e  $I_m$  los valores máximos que alcanzan estas sinusoides (o cosinusoides) de voltaje y corriente, respectivamente.

A continuación, y a modo de recordatorio para el alumno, se representa un compendio de las diferentes técnicas y definiciones auspiciadas por el modelo teórico en que se fundamenta el estudio de circuitos. Para ello, en la figura 6 se describen las bases de la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Por otro lado, tras esto, en la tabla 2 se recapitula y se establece, de un modo sucinto, el comportamiento de cada uno de los actores que puedan verse involucrados en un circuito (se toman en consideración tanto generadores, como elementos pasivos). Además, en la figura 7, se ilustra el comportamiento de estos elementos pasivos en el plano de frecuencias complejo mediante la representación fasorial. Para finalizar el resumen, se incluyen, por completitud, las definiciones de los diferentes elementos que conformarían la impedancia del circuito [ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7)].

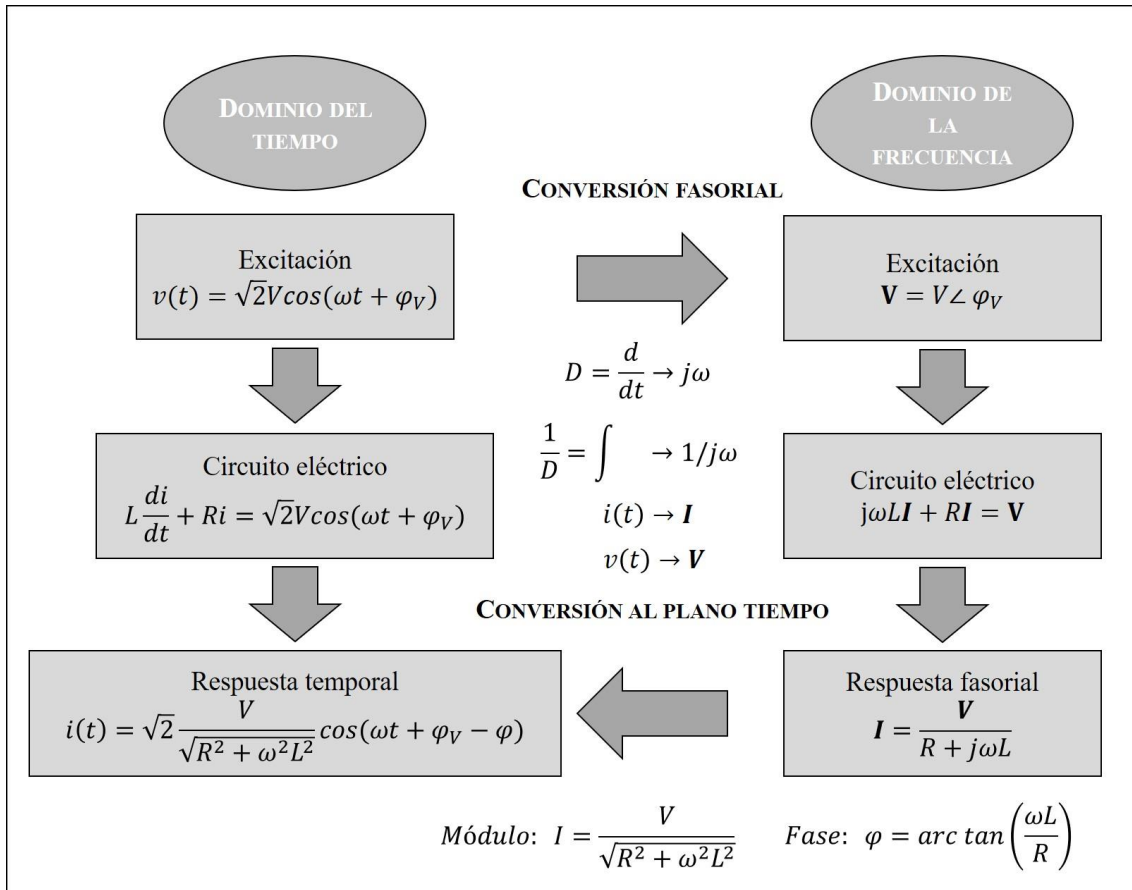


Fig. 6. Transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

$$V_{ef} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \quad V_{\max} = V_{ef} \sqrt{2}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{|V| \angle \varphi_V}{|Z| \angle \varphi} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\varphi_V - \varphi)$$

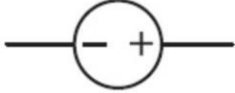
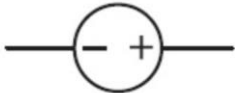
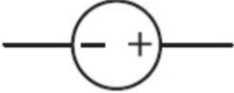
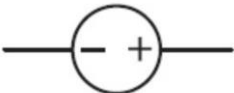


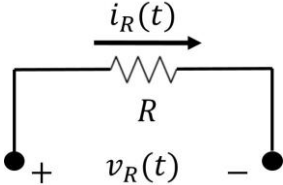
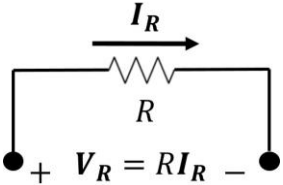
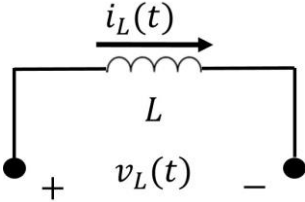
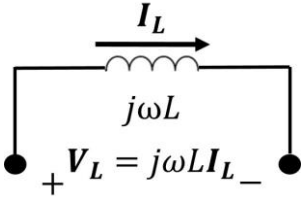
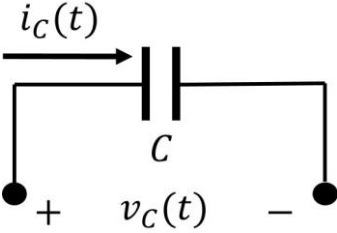
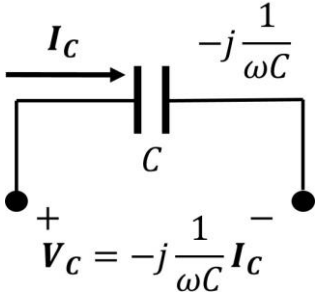
Circuito en el dominio del tiempo	Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia compleja
<p>1) Generador de tensión</p> $v(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \alpha)$  $v(t) = \sqrt{2}V\sen(\omega t + \alpha)$ 	<p>1) Generador de tensión</p> $\mathbf{V} = V\angle \alpha$  $\mathbf{V} = V\angle (\alpha - 90^\circ)$ 
<p>2) Generador de corriente</p> $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta)$ 	<p>2) Generador de corriente</p> $\mathbf{I} = I\angle \beta$ 
<p>3) Resistencia</p> 	<p>3) Resistencia</p> 
<p>4) Inductancia</p> 	<p>4) Inductancia</p> 
<p>5) Capacidad</p> 	<p>5) Capacidad</p> 

Tabla 2. Tabla de conversión del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja

Apuntemos como recordatorio importante de este tema:

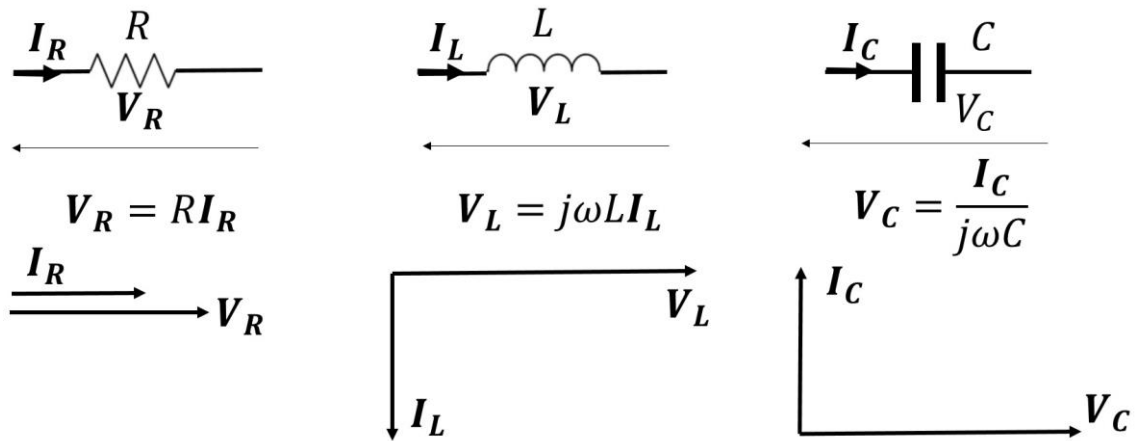


Fig. 7. Elementos pasivos presentes en circuitos de corriente alterna y su correspondiente representación compleja.

Finalmente, en relación a la impedancia del circuito, podemos establecer:

$$\text{Impedancia: } Z = R + jX \quad (\Omega) \quad (3.5)$$

**Reactancias:**

$$\text{Inductiva: } X_L = j\omega L \quad (\Omega) \quad (3.6)$$

$$\text{Capacitiva: } X_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (\Omega) \quad (3.7)$$

#### 4. Potencia y factor de potencia

En el caso general de una corriente alterna aplicada a una impedancia compleja, el voltaje y la corriente difieren en fase un ángulo  $\varphi$ .

Teniendo en cuenta que:

$$v(t) = Z \cdot i(t) \quad (4.1)$$

La potencia instantánea será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (4.2)$$

y, sabiendo que:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2} V \cos \omega t, \\ i(t) &= \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi), \\ p(t) &= v(t) \cdot i(t) = 2V \cdot I \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

esta potencia (4.2), quedará expresada de la forma:

$$p(t) = 2VI \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t - \varphi). \quad (4.4)$$

Integrando en un ciclo ó período,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt$$

se obtiene la potencia activa (potencia media):

$$P = VI \cos \varphi \quad (\text{W}) \quad (4.5)$$

Al  $\cos \varphi$ , se le llama factor de potencia, de tal forma que:

$$\cos \varphi = \frac{P}{VI} \quad (4.6)$$

Por lo tanto, la potencia instantánea  $p(t)$  es la suma de la potencia media  $VI \cos \varphi$  más un término fluctuante  $VI \cos(2\omega t - \varphi)$  que, teniendo en cuenta que  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$ , puede expresarse como

$$VI \cos(2\omega t - \varphi) = (VI \cos \varphi) \cdot \cos 2\omega t + (VI \text{sen} \varphi) \cdot \text{sen} 2\omega t.$$

Con lo cual, tendremos que

$$p(t) = VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t - \varphi) = VI \cos \varphi + (VI \cos \varphi) \cdot \cos 2\omega t + (VI \text{sen} \varphi) \cdot \text{sen} 2\omega t$$

donde  $P = VI \cos \varphi$  y  $Q = VI \text{sen} \varphi$  se denominarían potencia activa y potencia reactiva respectivamente. El término de potencia activa variaría entre 0 y 2P, mientras que el término relativo a la potencia reactiva lo haría de  $-Q$  a  $+Q$ .

De este modo, la potencia instantánea vendría determinada por

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos 2\omega t) + Q \cdot \text{sen} 2\omega t$$

En resumen, conviene entonces definir, en alterna, las siguientes potencias:

Potencia aparente:  $P_{ap} = VI$  (Voltio-Amperio)

Potencia activa:  $P = VI \cos \varphi$  (Voltio-Amperio activo)

Potencia reactiva:  $Q = VI \text{sen} \varphi$  (Voltio-Amperio reactivo)

Como  $V = ZI$  y  $R = Z \cos \varphi$  se demuestra fácilmente que  $P = RI^2$ .

Se puede calcular la potencia como un vector complejo de tal forma que contenga parte real e imaginaria.

Para ello si se tiene una tensión en forma fasorial:

$$V = V\angle 0 = V \cdot e^{j0} \quad (4.7)$$

y la corriente retrasada un ángulo  $\varphi$  :

$$I = I\angle -\varphi = I \cdot e^{-j\varphi} \quad (4.8)$$

Se puede calcular el producto de  $VI^*$  donde  $I^*$  indica el conjugado de  $I$ , obteniéndose:

$$VI^* = V\angle 0 \cdot I\angle +\varphi = VI\angle \varphi \quad (4.9)$$

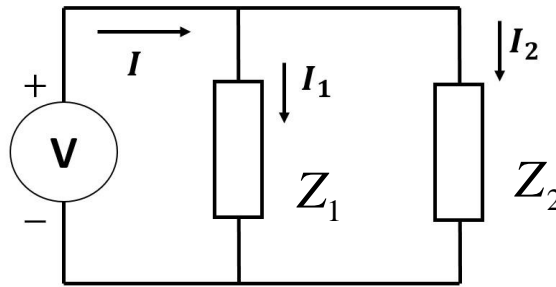
que puede expresarse en forma binómica como:

$$S = VI^* = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi = P + jQ$$

Podemos ver entonces que:

$$\operatorname{Re}[VI^*] = P \text{ (potencia activa)} \quad (4.10)$$

$$\operatorname{Im}[VI^*] = Q \text{ (potencia reactiva)}$$



Principio de conservación de la potencia compleja

$$S = VI^* = V(I_1 + I_2)^* = VI_1^* + VI_2^* = S_1 + S_2 \quad (4.11)$$

$$P_g = \sum P_i \quad (P_{generator} = \sum P_{cargas})$$

$$Q_g = \sum Q_i \quad (Q_{generator} = \sum Q_{cargas})$$

$$S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2}$$

$$I = I\angle -\varphi = I \cdot e^{-j\varphi}$$

La potencia aparente será el módulo del vector complejo de potencia:

$$|VI^*| = \sqrt{V^2 I^2 \cos^2 \varphi + V^2 I^2 \sin^2 \varphi} = VI \quad (4.12)$$

### Teorema de Tellegen utilizando magnitudes fasoriales

En el caso de un circuito que cuenta con  $r$  ramas

$$\sum_{k=1}^r V_k I_k^* = \sum_{k=1}^r S_k = 0 \rightarrow S_g = S_r \text{ (Separando en generadores y receptores)}$$

$$S_g = P_g + jQ_g \text{ (generadores)}$$

$$S_r = P_r + jQ_r \text{ (receptores)}$$

$$P_g = P_r; \quad Q_g = Q_r$$

La potencia activa (reactiva) entregada por los generadores es igual a la potencia activa (reactiva) que absorben los receptores.

## 5. Corrección del factor de potencia

Normalmente, en la práctica, las cargas suelen ser muy inductivas, esto es,  $I$  va retrasada respecto a  $V$ . Como el ángulo de desfase entre  $V$  e  $I$  se llama  $\varphi$ , lo anterior indicará por tanto que  $\varphi$  es muy grande, o lo que es lo mismo: que el término  $\cos \varphi$  (f.d.p.) es pequeño. Es necesario entonces aumentar el f.d.p. colocando un condensador en paralelo con el receptor. Para visualizar como se aumenta el  $\cos \varphi$ . Supóngase una carga que consume una corriente  $I_1$  con  $\varphi_1$ ,

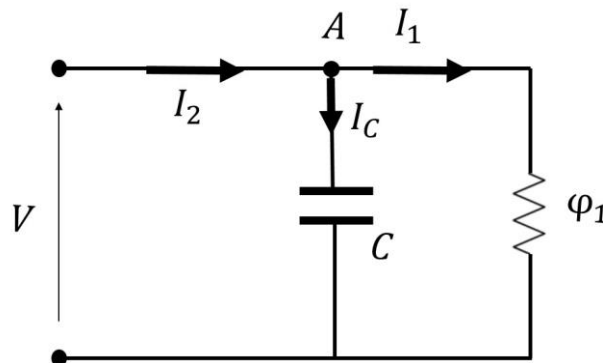


Fig. 8. Ejemplo de circuito.

Al poner el condensador en paralelo, se deriva una corriente  $I_C$  por él de tal forma que se disminuye la corriente total  $I_2$  haciendo al mismo tiempo que el ángulo que forman  $V$  e  $I_2$  sea más pequeño que antes.

Geoméricamente vamos a representar lo anterior eligiendo  $V$  como eje real.

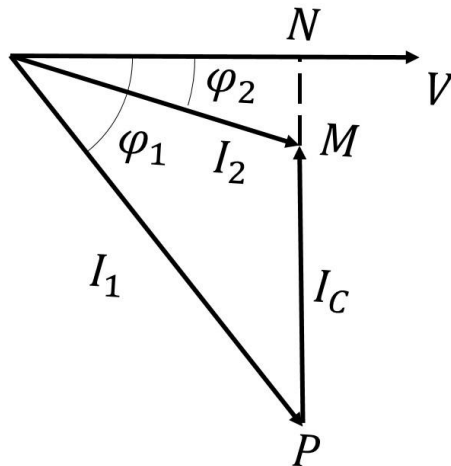


Fig. 9. Representación geométrica del problema ilustrado en la Fig. 8.

Hemos hecho la suma de fasores que es el primer lema de Kirchhoff en el nudo A.

El valor, por tanto, de  $I_C$  será:

$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} = VC\omega \quad (5.1)$$

## 6. Resonancia en un circuito serie RLC

Un circuito está, o entra, en resonancia cuando la tensión aplicada y la intensidad de corriente que circula están en fase. En resonancia, pues, la impedancia compleja del circuito se reduce exclusivamente a una resistencia pura  $R$ .

Como  $V$  e  $I$  están en fase, el factor de potencia de un circuito resonante es la unidad.

La impedancia compleja del circuito serie que se muestra en la figura es  $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$ . Dicho circuito entra en resonancia cuando  $X = 0$ , es

decir, cuando  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  o bien  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ . Ahora bien,  $\omega = 2\pi f$ , con lo que la frecuencia de resonancia viene dado por:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{Hz}) \quad (6.1)$$

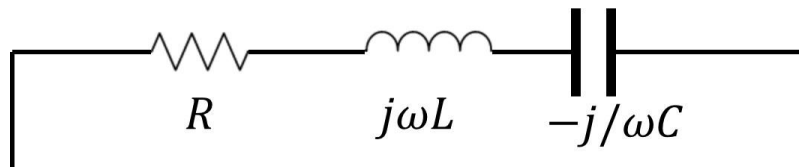


Fig. 10. Circuito serie RLC.

En la figura 11.a se representa el valor de  $Z$  y el de sus tres componentes  $R$ ,  $X_L$  y  $X_C$  en función de la pulsación  $\omega$ . Para  $\omega = \omega_0$ , las reactancias inductiva y capacitiva son iguales, y como  $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$  se deduce que  $Z = R$ . Es decir, el módulo de la impedancia de un circuito serie en resonancia es mínima. En consecuencia, la intensidad de corriente,  $I = \frac{V}{Z}$ , es máxima en dichas condiciones.

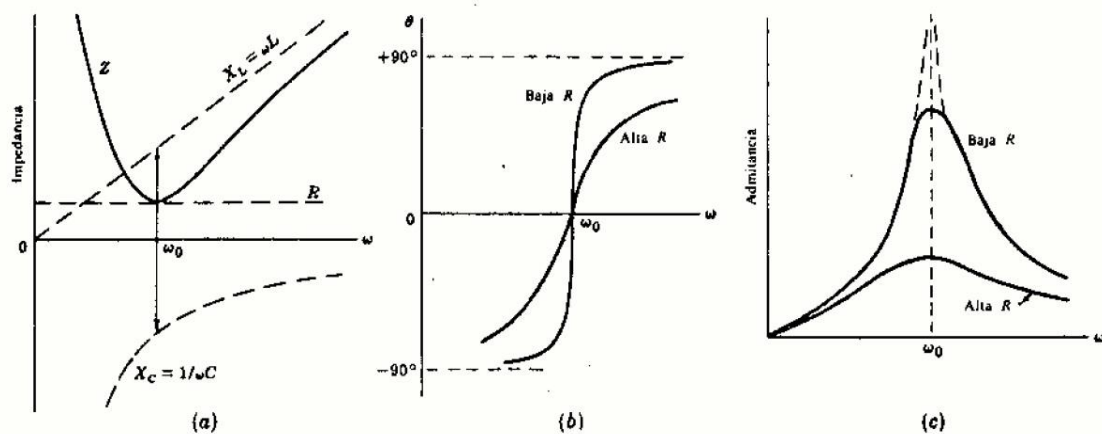


Fig. 11. Circuito serie RLC: Valores de  $Z$ , ángulo e  $Y$  en función de  $\omega$ .

Para frecuencias inferiores a la correspondiente a  $\omega_0$  la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, con lo que el ángulo de impedancia es negativo. Si la resistencia es pequeña, la variación del ángulo con la pulsación es mucho más rápida, como indica la figura 11.b. Cuando  $\omega$  tiende a cero, el ángulo de  $Z$  se aproxima a  $-90^\circ$ .

Para frecuencias superiores a la correspondiente a  $\omega_0$ , la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva, con lo que el ángulo de  $Z$  es positivo, aproximándose a  $+90^\circ$  cuando  $\omega \gg \omega_0$ .

En la figura 11.c se representa la admitancia del circuito serie  $Y = \frac{1}{Z}$  en función de  $\omega$ . Como  $I = VY$ , este diagrama muestra, asimismo, la variación de la intensidad de corriente con  $\omega$ . Puede observarse que para la pulsación  $\omega_0$  la corriente es máxima y que en resistencias pequeñas la intensidad de corriente es mayor. La curva de puntos representa el caso límite en que  $R = 0$ . No se representa el ángulo de la admitancia, ya que es el opuesto (igual y de signo contrario) del ángulo de la impedancia que muestra la figura 11.b.

## 7. Definición de voltaje entre dos puntos

En el caso de campos variables con el tiempo, el campo eléctrico total viene dado por

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.1)$$

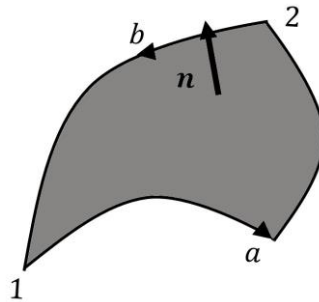


Fig. 12

Consideremos dos puntos, 1 y 2, en un campo electromagnético variable con el tiempo. La integral del campo eléctrico total, a lo largo de una línea concreta que va de 1 a 2, recibe el nombre de voltaje entre los puntos 1 y 2. Lo designaremos por  $V_{12}$ :

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \left( \nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} \quad (7.2)$$

El primer sumando del segundo miembro es, precisamente, la diferencia de potencial entre los dos puntos. Así,

$$V_{12} = (V_1 - V_2) - \frac{d}{dt} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (7.3)$$

De aquí que el concepto de *voltaje entre dos puntos* y la *diferencia de potencial entre dos puntos*, no sean iguales. Únicamente en el caso estático los dos conceptos son equivalentes.

La diferencia de potencial  $(V_1 - V_2)$  es una función de los punto 1 y 2 únicamente. Pero el segundo término de la derecha es una función del camino que une los dos puntos. Es fácil verlo si consideramos dos caminos

$$\int_{C_a}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{C_b}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \quad (7.4)$$

donde  $C_a$  y  $C_b$  denotan la circulación a lo largo de los caminos  $a$  y  $b$ , respectivamente. Por tanto,

$$\int_{C_a}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{C_b}^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \Phi \quad \Rightarrow \quad V_{12C_a} = V_{12C_b} - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.5)$$

donde  $\Phi$  es el flujo magnético a través del contorno  $1a2b1$ . En la práctica, esto implica que, midiendo el voltaje entre dos puntos con voltímetro, obtendríamos distintas lecturas al colocar el voltímetro de carga en forma distinta. Esta es una conclusión muy importante para campos electromagnéticos variables con el tiempo.

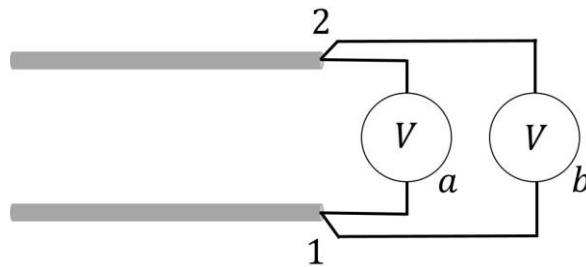


Fig. 13

La segunda hipótesis básica de la teoría de circuitos implica que el voltaje entre dos puntos es único. Esto es, que la lectura de un voltímetro conectado entre dos puntos cualesquiera del circuito no depende de la forma en que se coloque el voltímetro, por lo que el campo magnético creado por las corrientes en el circuito puede ser ignorado siempre, excepto dentro de los propios elementos lo componen.

Conclusión: La teoría de circuitos es una teoría aproximada, pero con un grado de aproximación extraordinariamente alto. Implícitamente, se suponen las siguientes limitaciones: (1) Las dimensiones del circuito son muy pequeñas comparadas con  $\frac{2\pi c}{\omega}$ .

(2) Los campos eléctricos y magnéticos se suponen prácticamente localizados dentro de los elementos del circuito.

## 8. Factor de calidad $Q$

El factor de calidad de una bobina, de un condensador, o de un circuito en general se define por

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disipada por período}} \quad (8.1)$$

En los circuitos de las figuras, la energía disipada por período es el producto de la potencia media disipada en la resistencia  $R(I_{\max}/\sqrt{2})^2$  multiplicada por el período  $T$  o  $1/f$ .

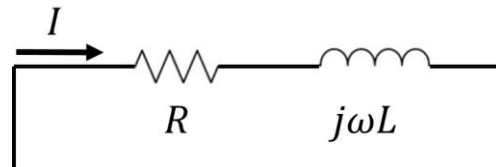


Fig. 14. Circuito  $RL$ .

En el circuito serie  $RL$  de la figura 14, la energía máxima almacenada es  $\frac{1}{2}LI_{\max}^2$ . Por tanto,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_{\max}^2}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad (8.2)$$

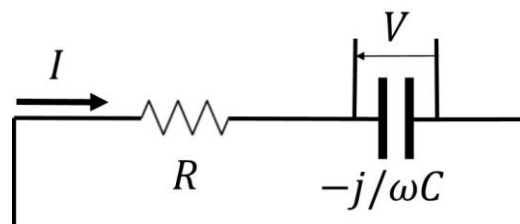


Fig. 15. Circuito  $RC$ .

En el circuito serie  $RC$  de la figura 15, la energía máxima almacenada es  $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$  o

bien  $\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2 C$ . Por consiguiente,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} I_{\max}^2 / \omega^2 C}{(I_{\max}^2 / 2) R (1/f)} = \frac{1}{\omega CR} \quad (8.3)$$

En un circuito serie  $RLC$  en resonancia la energía almacenada es constante. Teniendo en cuenta que cuando la tensión en el condensador es máxima, la intensidad de corriente por la bobina es nula, y viceversa,  $\frac{1}{2} CV_{\max}^2 = \frac{1}{2} LI_{\max}^2$ . Es decir,

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \quad (8.4)$$

La representación gráfica de la intensidad de corriente en un circuito serie  $RLC$  en función de la pulsación, o de la frecuencia, es análoga a la correspondiente de la admitancia de la Fig. 11.c. En la siguiente figura se representa la intensidad que circula por un circuito  $RLC$  en función de  $\omega$  o bien mediante un cambio de escala apropiado, en función de  $f$ . En el valor  $\omega_0$  la intensidad de corriente  $I_0$  es máxima. Se han señalado los puntos en los que la intensidad toma el valor 0,707 del máximo. Las pulsaciones correspondientes son  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

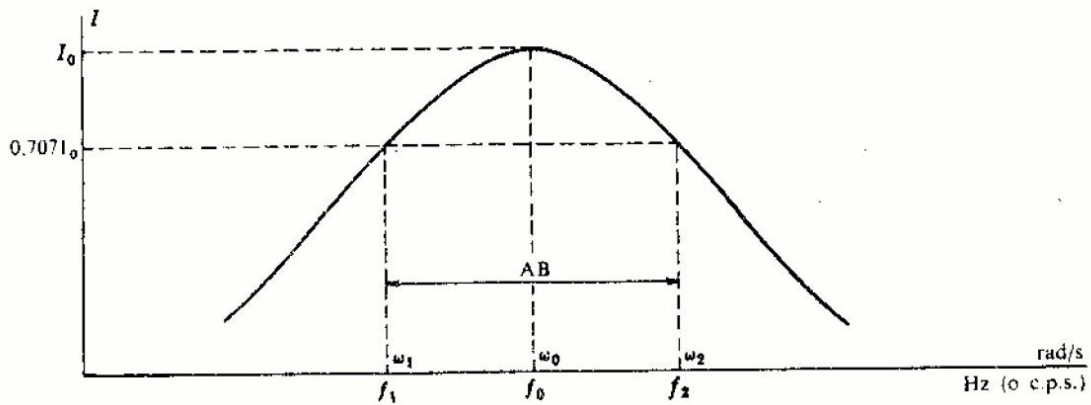


Fig. 16. Intensidad de corriente de un circuito serie  $RLC$  en función de  $\omega$ .

Como la potencia consumida por el circuito es  $RI^2$ , para  $I = 0,707I_0$  la potencia es la mitad de la que corresponde al valor máximo que tiene lugar en  $\omega_0$ . Los puntos asociados a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se llaman puntos de potencia mitad. La distancia entre ambos puntos se mide en hertzios (Hz) o ciclos por segundo (c.p.s.) y se llama ancho de banda (*Bandwidth* –  $BW$ ).

En estas condiciones, podremos expresar el factor de calidad por la relación entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda; es decir,

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{AB}. \quad (8.5)$$

Se puede demostrar que los valores  $\omega_0$  y  $f_0$  corresponderían con las medias geométricas de los valores mínimo y máximo, mediante

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

Para  $\omega = \omega_1$ , la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva ( $X_C - X_L = R$ ), la intensidad de corriente es 0.707 de su valor máximo y como  $I = V/Z$ ,  $|Z| = 1.414$  su valor para  $\omega = \omega_0$ . A la frecuencia superior de media potencia,  $\omega_2$ , la reactancia inductiva es mayor que la capacitiva ( $X_L - X_C = R$ ) y  $|z|$  sigue siendo 1.414 su valor para  $\omega = \omega_0$ .

## APÉNDICES

### A1. Fuentes dependientes

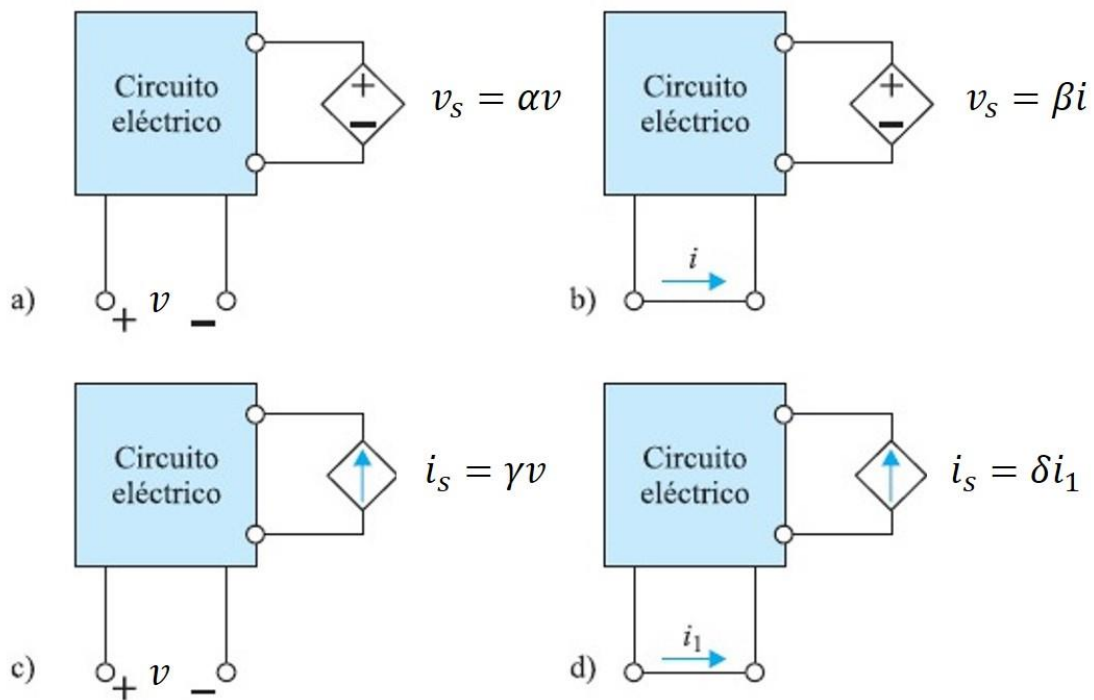


Fig. A1. Fuentes de tensión y de corriente dependientes.

### A2. Equivalencia de generador de tensión – generador de corriente

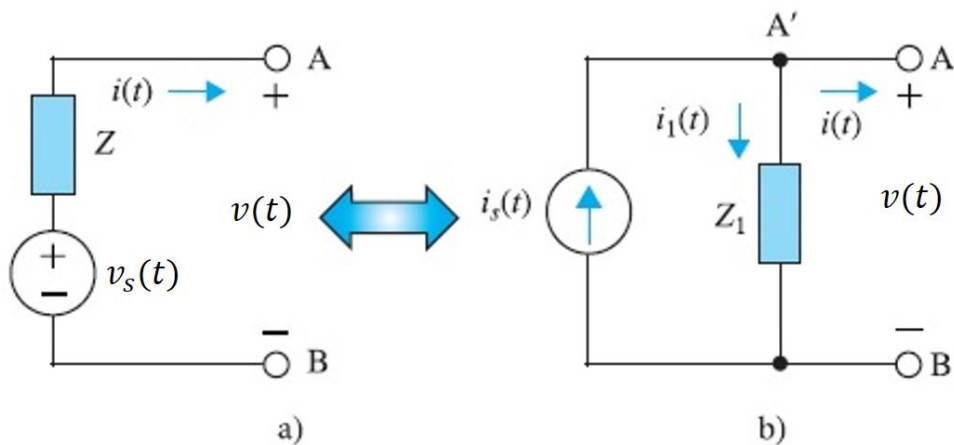


Fig. A2. Equivalencia de generador de tensión (a) – generador de corriente (b).

Imponiendo la igualdad de  $v(t)$  e  $i(t)$  hacia el circuito externo, se observa que para el generador de tensión, al aplicar el segundo lema de Kirchhoff, se cumple:

$$v_s(t) = v(t) + Zi(t) \quad (\text{A.1})$$

de donde resulta

$$i(t) = \frac{v_s(t)}{Z} - \frac{v(t)}{Z} \quad (\text{A.2})$$

si de una forma dual se aplica el primer lema de Kirchhoff al generador de corriente, se tiene que en el nudo  $A'$ :

$$i(t) = i_s(t) - i_1(t) = i_s(t) - \frac{v(t)}{Z_1} \quad (\text{A.3})$$

las ecuaciones (A.2) y (A.3) coinciden cuando se cumple la doble igualdad siguiente:

$$i_s(t) = \frac{v_s(t)}{Z}; \quad Z_1 = Z \quad (\text{A.4})$$

las ecuaciones (A.4) representan de este modo las reglas de transformación e indican, en este caso, los valores de los parámetros del generador de corriente en función de los valores del generador de tensión. Inversamente, si se parte de un generador de corriente real, de la ecuación (A.4), se deduce:

$$v_s(t) = Z_1 i_s(t); \quad Z = Z_1 \quad (\text{A.5})$$

que nos dan los valores de los parámetros del generador de tensión equivalente al de corriente.

### A3. Equivalentes Thévenin y Norton

Cualquier red lineal, compuesta de elementos pasivos y activos (independientes o dependientes) se puede sustituir (desde el punto de vista de sus terminales externos  $AB$ ) por un generador de tensión  $V_{Th}$  denominado generador de Thévenin, más una impedancia en serie  $Z_{Th}$ . Si ambas redes son equivalentes, deben de dar los mismos valores de tensión y corriente a una impedancia de carga  $Z_L$ .

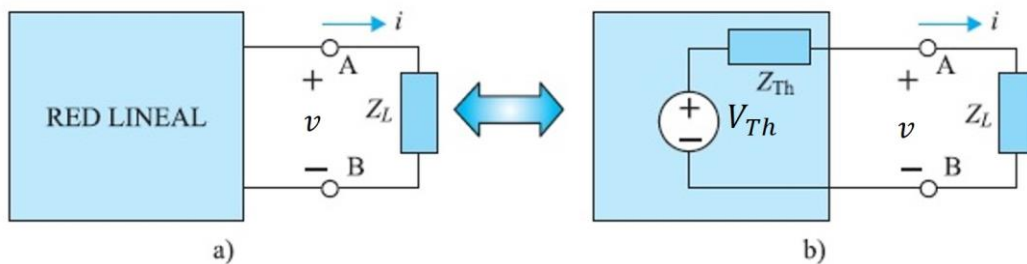


Fig. A3. Sustitución de una red lineal por el teorema de Thévenin.

Para calcular los valores de  $V_{Th}$  y  $Z_{Th}$ , se necesita fijar dos condiciones específicas para  $Z_L$  ( $Z_L = 0 \rightarrow$  circuito abierto y  $Z_L = \infty \rightarrow$  cortocircuito).

El valor de  $V_{Th}$  de la red equivalente es igual a la magnitud  $V_0$  de la red lineal que se obtiene entre los terminales de salida  $AB$  al desconectar la carga y dejar el circuito abierto ( $Z_L = \infty$ ).

Si elegimos

$$Z_L = 0 \quad (\text{A.6})$$

que representa un cortocircuito entre los terminales externos

$$i_{\text{corto}} = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}}$$

donde

$$Z_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{\text{corto}}} \quad (\text{A.7})$$

El valor de  $Z_{Th}$  se obtiene como cociente entre la tensión que da la red en vacío  $V_0 = V_{Th}$  y la corriente de cortocircuito  $i_{\text{corto}}$ .

El teorema de Thévenin tiene una versión dual que es el teorema de Norton. En este caso, la red lineal se puede sustituir por un generador de corriente  $i_N$  en paralelo con una impedancia  $Z_N$ .

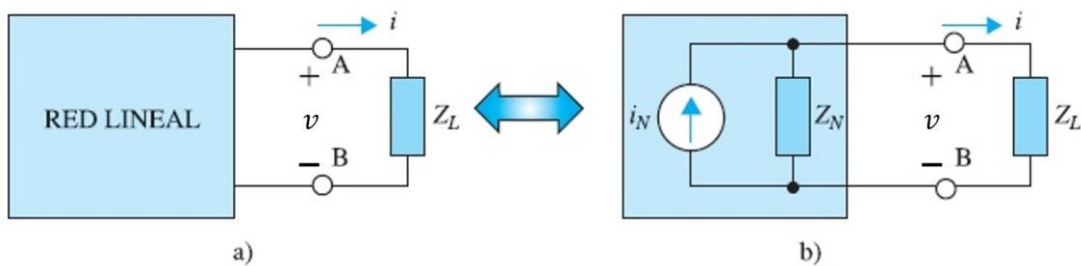


Fig. A4. Sustitución de una red lineal por el teorema de Norton.

$$i_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} \quad \rightarrow \quad Z_N = Z_{Th} \quad (\text{A.8})$$